多元函数（曲面）的法向量

Dezeming Family

2021 年 9 月 2 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

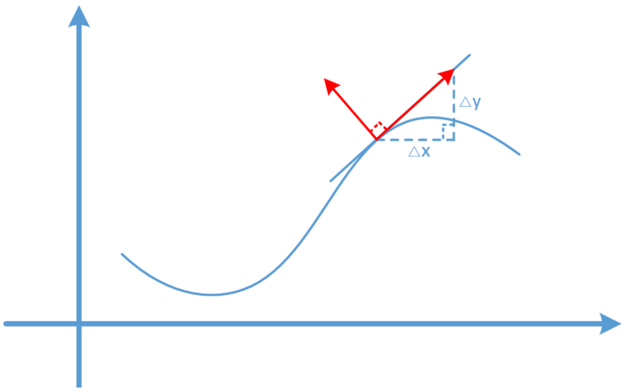
20210903：完成第一版。

目录

一　一元函数的法向量

对于一元函数 $y = f(x)$，其上的某一点坐标为 $(x_0, f(x_0))$，对应的法向量为 $(f'(x_0), -1)$。

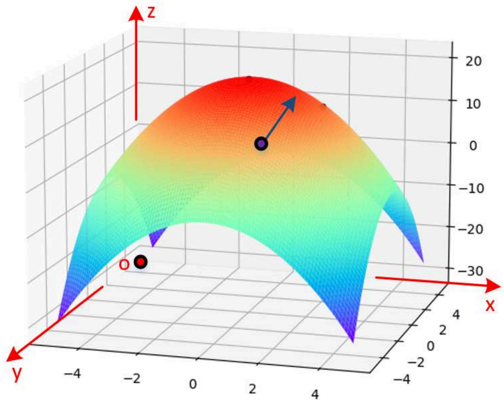
首先我们知道该点的斜率为 $f'(x_0)$，即下图中的切线高与长的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为 $f'(x)$：

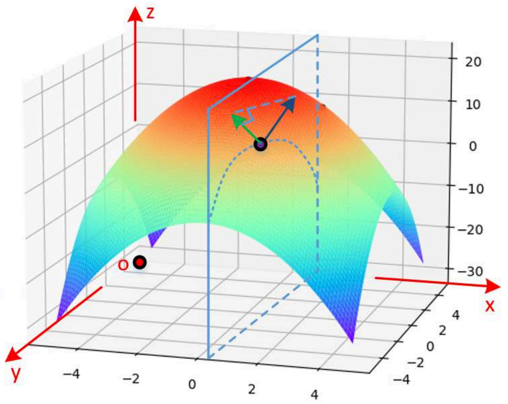


所以我们可以取切线向量为 $(1, f'(x))$。因为法向量垂直于切线向量，所以 $\boldsymbol{n} \cdot (1, f'(x)) = 0$，所以 $\boldsymbol{n} = \lambda \times (f'(x), -1)$，这里的 λ 可以取任意值。

二　二元函数法向量

对于二元函数 $z = f(x, y)$，某一点 (x_0, y_0, z_0) 的法向量如下图左，可以映射到 ZOY 平面上，如图右：





我们可以求其在 ZOY 平面上的函数变化率，也就是偏导 $f'_y(x_0, y_0)$，得到法向量在 ZOY 平面的投影 $(f'_y(x_0, y_0), -1)$。

同理，可以得到法向量在 ZOX 平面的投影为 $(f'_x(x_0, y_0), -1)$，因此法向量我们就可以设置为：

$$(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) \tag{二.1}$$

三 空间曲面的法向量

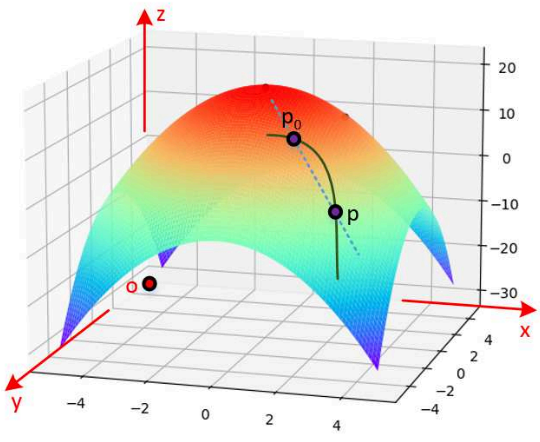
空间曲面可以描述为 $\Phi(x, y, z) = 0$，在某个微小区域 (x_0, y_0, z_0) 附近，曲面可以看为平面，在这个小区域中，设法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$，所以 $\boldsymbol{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$。

我们设通过点 (x_0, y_0, z_0) 的某一条曲线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \varphi(t) \end{cases} \tag{三.1}$$

3 1 参数曲线的切线

我们先研究这个曲线的切线。



设 p_0 点对应于 $t = t_0$ 的曲线位置 $(\phi(t_0), \psi(t_0), \varphi(t_0))$，当 $t = t_0 + \Delta t$ 时，可以得到曲面另外一点 p_1：

$$p_1 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \tag{三.2}$$

已知空间两点 p_0 和 p_1，这两点构成的直线（其实就是曲线的割线）就可以计算出：

$$\frac{x - x_0}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{y - y_0}{(y_0 + \Delta y) - y_0} = \frac{z - z_0}{(z_0 + \Delta z) - z_0} \tag{三.3}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，割线会逐步趋近于切线。我们在分母上同时除以 Δt，得到：

$$\frac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}} \tag{三.4}$$

令 $\Delta t \to 0$，得到切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\varphi'(t_0)} \tag{三.5}$$

切线方程需要保证偏导 $\phi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$ 不全为 0。

3 2 曲面的切平面

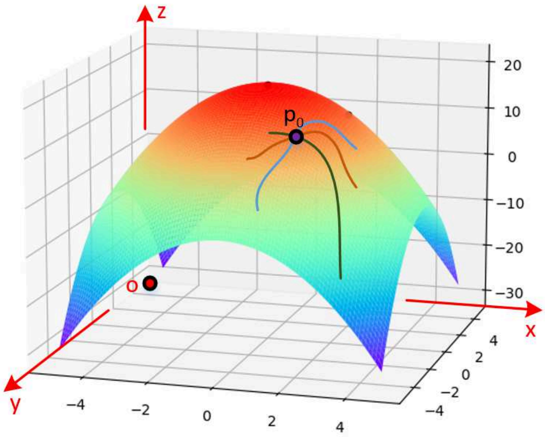
由切线方程可知，切线向量为 $\big(\phi'(t_0), \psi'(t_0), \varphi'(t_0)\big)$。

在整个曲面上，都有恒等式 $F(\phi(t_0), \psi(t_0), \varphi(t_0)) = 0$，对该式求 $t = t_0$ 处的**全导数**，可以得到：

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\phi'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)\psi'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)\varphi'(t_0) = 0 \tag{三.6}$$

由上式，我们提取 $\boldsymbol{n} = \Big(F'_x, F'_y, F'_z\Big)$，该向量与切向量垂直。

由于切线我们可以任取：



可知所有切线构成一个切平面（已知切平面法向量和平面上某个点 p_0 就可以确定该平面）。而法线 $\boldsymbol{n}$ 就是该切平面的法向量，即曲面在该点处的法向量。

所以我们得到法向量的求法：

$$\boldsymbol{n} = \Big(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\Big) \tag{三.7}$$

我们还可以推导出前面得到的二元函数法向量，对于 $z = f(x, y)$，可以设函数 $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$，从而求得法向量值。

参考文献

[1] https://zhuanlan.zhihu.com/p/90858099

[2] 刘建亚. 大学数学教程. 微积分. 二 [M]. 高等教育出版社, 2003.